数理解析研究所講究録
第 1811 巻 2012 年 164-170

Non-Schurian association schemes derived from BGW

平坂　貢 (Mitsugu Hirasaka)*

2012年3月7日

1　ASの拡大とBGW

H, K, G を群とする。G が $K \simeq N$, $G/N \simeq H$ となる正規部分群 N を有するときに、G は K の H による拡大であると言う。アソシエーションスキーム（以下、AS と略す）とは有限群を一般化した組合せ的対象とも考えられる。本講演では AS の拡大を取扱い、その拡大の構造の中に BGW(balanced generalized weighing) 行列が現れること、逆に BGW から AS の拡大を構成できることを示す。

[8] において、AS は有限集合 X と、$X \times X$ の分割 S である代数的条件を満たすものとの対 (X, S) と定義されるが、本講演では、AS を $\{0,1\}$-行列の集合として定義する。

定義 1.1. $\{0,1\}$ のみを成分としてもつ n 次正方行列の集合 $\{A_0, A_1, \ldots, A_d\}$ は以下の性質を満たすとき AS と呼ばれる:

1. $\sum_{i=0}^{d} A_i = J_n$,　但し、J_n は成分が全て 1 の n 次正方行列である。
2. $I_n \in \{A_i \mid i = 0,1,\ldots,d\} = \{A_i^t \mid i = 0,1,\ldots,d\}$ 但し、I_n は単位行列で、A_i^t は A_i の転置行列である。
3. $\{A_i \mid i = 0,1,\ldots,d\}$ で張られる $M_n(\mathbb{C})$ の部分空間は行列の積に関して閉じている。

---

*釜山大学数学科所属。2012 年 2 月 1 日から 2013 年 1 月 31 日迄、九州大学数理学府に訪問教授として滞在。

上記の 3 番目の条件は、

$$\forall i, j, \exists\{c_{ij}^k\}; A_iA_j = \sum_{k=0}^{d} c_{ij}^k A_k$$

と書き下すことができる。この $\{c_{ij}^k\}$ は AS の構造定数（もしくは交叉数）と呼ばれる。2 番目の条件と合わせて、A_i の行和は一定であることがわかる。この行和を k_i と記す。

定義 1.2. $S = \{A_0, A_1, \dots, A_d\}$ を AS とする。全ての A_i が対称行列であるとき、$\{A_0, A_1, \dots, A_d\}$ は対称 AS と呼ばれる。

T を S の空でない部分集合とし、T に属する行列の和を A_T と記し、その行和を k_T と記す。

もし $A_TA_T = k_TA_T$ ならば、T は積閉と呼ばれる。例として、S や単位行列のみからなる集合は積閉である。これらは自明な積閉集合であると呼ばれる。もし S が自明でない積閉集合を持たないとき、S は原始的と呼ばれる。

積閉集合 T に対し、T 上の構造定数を保存する T の置換全体を $\mathrm{Aut}(T)$ と記す。

群にも部分群、商群が定義されるように、AS にも部分 AS、商 AS が定義される（詳細は、[8] を参照)。そして、AS の拡大も同様に定義される（詳細は、[1] を参照)。

まずは、2 個の行列からなる AS の C_2 による拡大で対称になるものを考える、但し、C_k は位数 k の巡回群を意味する。

この問題は、O_n を n 次の零行列とするとき、

$$\{(I_n, O_n; O_n, I_n), (J_n - I_n, O_n; O_n, J_n - I_n)\}$$

を含む対称な AS を全て見出す問題に帰着する。その答えは、

$$\{(O_n, A; A^t, O_n), (O_n, J_n - A; J_n - A^t, O\}$$

を加えることで、A は、

$$AA^t \in \mathrm{span}(I_n, J_n)$$

となる $\{0, 1\}$-行列であることが証明される。すなわち、A は n 個の頂点集合上の対称デザインの結合行列であり、ここに AS の拡大との関係が見出せる。

次に、$\{I_{2m}, A, B\}$ の C_2 による拡大を考える、但し、$B = J_{2m} - I_{2m} - A$ で、A は互換の積 $(12)(34)\cdots(2m-1, m)$ に対応する $2m$ 次の置換行列である。この問題は、

$$\{(I_{2m}, O_{2m}; O_{2m}, I_{2m}), (A, O_{2m}; O_{2m}, A), (B, , O_{2m}; O_{2m}, B)\}$$

を含む対称スキームを全て見出す問題に帰着する。その答えを述べる前に、[7] に基づく BGW の定義を紹介する。

定義 1.3. G を有限群とする。整数環上の群環 $\mathbb{Z}[G]$ 上の v 次の正方行列 W が以下の条件を満たすとき、$BGW(v, k, l; G)$ 行列と呼ばれる:

1. $\forall i, j \in \{1, 2, \ldots, v\}$, $W_{ij} \in G \cup \{0\}$;
2. $WW^* = kI_v + \frac{l}{|G|}\bar{G}(J_v - I_v)$.

但し、$\bar{G} = \sum_{g \in G} g \in \mathbb{Z}[G]$ で、W^* の (i, j) 成分は、$W_{ji} = 0$ ならば 0 で、そうでないならば、W_{ji}^{-1} となる。

前段落の問題に対する答えは以下のように導かれる。

追加して対称 AS になる行列を $\{(O, B_i; B_i^t, O) \mid i = 1, 2, \ldots, r\}$ とすると、$r \leq 3$ である ([4, p.223]、あるいは、[5, Prop. 2.7] を参照)。$\{I, A\}$ は行列の積に関して群をなし、右からの積により、$\{(O, B_i; B_i^t, O) \mid i = 1, 2, \ldots, r\}$ 上に作用する。その場合分けは以下のとおりである。

1-1. $r = 1$.

2-1. $r = 2$, $\{I_{2m}, A\}$ は自明に作用する。

2-2. $r = 2$, $B_1 A = B_2$.

3-1. $r = 3$, $\{I_{2m}, A\}$ は自明に作用する。

3-2. $r = 3$, $\{I_{2m}, A\}$ の作用で、B_i のみが固定される。この場合、一般性を失うことなく、B_3 のみが固定されるとしてよい。

1-1 の場合、$B_1 = J_{2m}$ なので、一意に定まる。

2-1 の場合、$B_1 = C \otimes J_2$、但し、$\otimes$ は行列のクロネッカー積で、C は $CC^t \in \mathrm{span}(I_m, J_m)$ となる m 次の $\{0, 1\}$-正方行列である。

2-2 の場合、B_1 は (同様に B_2 も)

$$(B_1)_{2j+1, 2k+1} = 1 \Longleftrightarrow W_{j,k} = 1 \in C_2$$

という対応により、$BGW(m,m,m;C_2)$ 行列 W を誘導する。

3-1 の場合、$\{I_{2m}, A\}$ による商スキームを考えると、起りえないことが分かる。

3-2 の場合、B_1 は (同様に B_2 も)、

$$(B_1)_{2j+1,2k+1} = (B_1)_{2j+1,2k+2} = 0 \Longleftrightarrow W_{j,k} = 0 \in \mathbb{Z}[C_2]$$

$$(B_1)_{2j+1,2k+1} = 1 \Longleftrightarrow W_{j,k} = 1 \in C_2$$

という対応により、$BGW(m,k,l,C_2)$ 行列 W を誘導する。

このようにして、全ての場合においてBGW行列との関係性が示された。

次に考察すべきことは、上記を一般化した 3 個の行列からなる非原始的 AS の C_2 による対称拡大である。しかしながら、前述のような結果は得られるかどうか未解決である。しかし、任意の BGW 行列からこのような拡大が得られることは次のように示される。

W を $BGW(n,k,l;G)$ とする。そのとき、3 個の行列からなる非原始的 AS の C_2 による対称拡大を以下のように構成できる：

1. G のある正則表現を $\{P_g \mid g \in G\}$ とする。
2. $g \mapsto P_g$, $0 \mapsto O_m$ という写像により、W から、次数 mn の $\{0,1\}$-正方行列 $\tilde{W}$ を構成する, 但し、$|G| = m$.
3. $(O, \tilde{W}; \tilde{W}^t, O)$ によって、生成される全行列環の部分代数は、アダマール積に関して閉じており、そのアダマール積による原始冪等元達は唯一に決まり、AS をなす。
4. 更に、その AS は求める拡大になっている。

2 BGWの周辺の話題

この節では、BGW 関連の問題を紹介する。

p を素数とするとき、$BGW(p,p,p;C_p)$ の一意性を考察する。W と V を $BGW(p,p,p;C_p)$ とする。p 次の置換行列 P_i と G の元を対角成分に持つ対角行列 D_i, $i = 1,2$ が存在して、$V = P_1 D_1 W D_2 P_2$ となるとき、$V \simeq W$ と記す。$\simeq$ は同値関係であり、この同値関係による同値関係の個数を決定していく。$p = 2,3,5,7$ のときには、手計算で、$BGW(p,p,p;C_p)$ の同値類が 1 個だけであることを確かめることができる。

$p=11,13$ のときには、計算機により、同値類の個数が 1 個だけであることが確かめられる（私が指導する学生である H.Jo が計算プログラムを書いた）。しかし、$p=17$ のときは、まだ未解決である。

任意の $BGW(p,p,p;C_p)$ 行列は位数 p の射影平面を誘導することが知られている（[6] を参照）。一方で、$p\geq 11$ のときの位数 p の射影平面の同値類の個数は 1 以上であること以外は知られてない。このことは、$BGW(p,p,p;C_p)$ の同値類の個数が 2 個以上であった時に、新たな射影平面を構成する可能性があることを示唆している。

3 Non-Schurian AS の構成

この節では、表題にある Non-Schurian AS の構成を取扱い、J.R.Cho と K.Kim との共同研究で得られた定理の応用を紹介する。

定義 3.1. $\{A_i \mid i=0,1,2,\ldots,d\}\subseteq M_n(\mathbb{C})$ を AS とする。もし $\{A_i \mid i=0,1,2,\ldots,d\}$ で張られる $M_n(\mathbb{C})$ の部分空間が、$\{1,2,\ldots,n\}$ 上のある置換群 G の中心化環と一致するとき、$\{A_i \mid i=0,1,2,\ldots,d\}$ は Schurian と呼ばれる。すなわち、

$$\mathrm{span}\{A_i \mid i=0,1,2,\ldots,d\}=\{M\in M_n(\mathbb{C}) \mid \forall g\in G, P_gM=MP_g\}$$

但し、P_g は置換 g に対応する置換行列である。

p を素数として、$\mathbb{F}_p$ を p 個の元からなる有限体とする。このとき、$X=\mathbb{F}_p^3$ 上の置換群 G を次のように定義する。

$$G=\langle \rho,\tau_x \mid x\in X\rangle$$

但し、

$$\rho: X\to X, (a,b,c)\mapsto (a+b,b+c,c)$$

$$\tau_x: X\to X, y\mapsto x+y$$

である。

このとき、G の作用の中心可換はアダマール積に関する原始冪等元からなる唯一の基底を有し、その基底は AS をなす。この AS に属する行列の一部を変形して、同じ構造定数を持つ Non-Schurian AS を構成する。

$S=\{A_i \mid i=0,1,\ldots,d\}$ を上で定義されている G から構成される AS とする。

$$H=\{A_i\in S \mid k_i=1\},\ T=\{A_i\in S \mid \forall A_j\in H, A_jA_i=A_i\}\cup H$$

のように H と T を定義する。このとき、$H\subseteq T$ であり、H と T は共に積閉である。積閉の定義から、T は X 上の同値関係を定義することがわかる。その同値類全体を $X_1,X_2,\ldots,X_p$ と記す。このとき、各 X_a 上で AS、$\{A_{ab} \mid b\in T\}$ が定義される、但し、A_{ab} は A_b, $b\in T$, を $X_a\times X_a$ 上に制限したものである。ここで、$T-H$ の任意の元 A_b に対して、$\tilde{A}_b=A_{1b}^t+\sum_{a=2}^{p}A_{ab}$ と定義する。このとき、$H\cup\{\tilde{A}_b \mid b\in T-H\}\cup(S-T)$ は AS になり、S と同じ構造定数を持ち、$p\geq 3$ のときは Non-Schurian であることが証明される。($p=3$ のときは、S と同じ構造定数を持つ AS の同値類の個数が分かっている。詳細は [3] を参照)。この結果は次のように一般化される（詳細は [2] を参照)。

定理 3.1. $S=\{A_i \mid i=0,1,\ldots,d\}$ を AS で、T は S の積閉集合で、$X_1,\ldots,X_m$ を T に対応する同値類全体とする。$\iota_1,\ldots,\iota_m\in \mathrm{Aut}(T)$ で、$\tilde{\iota}_1,\ldots,\tilde{\iota}_m\in\mathrm{Aut}(S)$ となるものとする、但し、$\tilde{\iota}_i$ は $S\backslash T$ の元を固定し、T への制限したとき ι_i と一致するものとする。このとき、$\{A'_j \mid A_j\in T\}\cup(S\backslash T)$ は AS となり、S の同一の構造定数を持つ、但し、$A'_j=\sum_{i=1}^{m}\iota_i(A_j)_{X_i\times X_i}$ で、$\iota_i(A_j)_{X_i\times X_i}$ は $\iota_i(A_j)\in T$ を $X_i\times X_i$ 上に制限した行列である。

定理 3.2. $S=\{A_i \mid i=0,1,\ldots,d\}$ を AS で、H と T は $H\subseteq T$ となる S の積閉集合で、次の条件を満たすものとする。

1. S の T による商 AS は行列の積に関して群をなす。
2. 任意の $A_i\in S\setminus T$ に対して、$A_i\sum_{A_j\in T}A_j$ と $A_i\sum_{A_j\in H}A_j$ は線形従属である。
3. 任意の $A_i\in T$ に対して、$A_i\sum_{A_j\in H}A_j$ と A_i は線形従属である。

このとき、H の任意の元を固定する $\iota\in\mathrm{Aut}(T)$ に対して、$\tilde{\iota}\in\mathrm{Aut}(S)$ である、但し、$\tilde{\iota}$ は、$S\setminus T$ の任意の元を固定し、T への制限したとき ι と一致するものとする。

ここで、相異なる i,j に対し、$X_i\times X_j$ 上に制限した部分行列は BGW と同一視されることを言及しておく。

参考文献

[1] S. Bang, M. Hirasaka, Construction of association schemes from difference sets, European J. Combin. 26 (2005), no. 1, 59-74.

[2] J.R. Cho, M. Hirasaka, K.Kim, On p-schemes of order p^3, submitted to J.Algebra, 2012.

[3] A. Hanaki, I. Miyamoto, `http://kissme.shinshu-u.ac.jp/as/data/as28`.

[4] D.G. Higman, Coherent algebras, Linear Algebra Appl. 93 (1987), 209-239,

[5] M. Hirasaka, R. Sharafdini, Characterization of balanced coherent configurations, J. Algebra 324 (2010), no. 8, 2025-2041.

[6] D. Jungnickel, On difference matrices, resolvable transversal designs and generalized Hadamard matrices, Math. Z. 167 (1979), no. 1, 49—60

[7] W.de Launey, D. Flannery, Algebraic design theory, Mathematical Surveys and Monographs, 175. American Mathematical Society, Providence, RI, 2011.

[8] P.-H. Zieschang, Theory of association schemes, Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2005.